תאריך הבחינה:	11.02.2021 כ"ט שבט, תשפ"א
שם המרצה:	פרופ' ישראל פרמט ודר' יואב קרנר
שם הקורס:	מודלים של רגרסיה לינארית
מספר הקורס:	364.1.1091
שנה:	תשפ"א
סמסטר:	א'
מועד:	ב'
משך הבחינה:	1:20, 20 דק הפסקה ו-1:20

הנחיות חשובות:

- יש לפתור את כל השאלות

- יש ללוות את דרך הפתרון בהסברים מילוליים קצרים

- ניתן להשתמש בכל הנוסחאות והתוצאות שפותחו או הוצגו בכיתה ואין צורך להוכיחן מחדש אלא אם כן זה נדרש במפורש

-בכל מבחן השערות יש לנסח את ההשערות הנבדקות, לציין מהו סטטיסטי המבחן וכיצד הוא מתפלג, ולכתוב מהו אזור הדחייה (זאת כמובן בנוסף לתוצאת המבחן)

- אם לא צוין אחרת יש להשתמש בר"מ של 5%

הבחינה היא בשני חלקים (לכל חלק 80 דקות). החלק הראשון מכיל את שאלה 1 בלבד. יש לסרוק את הפתרון ולהגישו במהלך ההפסקה.

החלק השני מכיל את שאלות 2-3. אותו כמובן יש לסרוק בתום הבחינה.

דפי הנוסחאות וטבלאות ההתפלגויות מצורפות לכל חלק בנפרד

בהצלחה ☺

שאלה מספר 1 (תשעה סעיפים ו-54 נקודות)

קיימת סברה שצריכת הדלק בנהיגה עירונית גבוהה ב-20% מצריכת הדלק בנהיגה בין עירונית.

לשם כך נדגמו n נסיעות של נהגים שונים, מתוכם n_1 נסיעות עירוניות ו- $n-n_1$ נסיעות בין עירוניות. עבור כל נסיעה נרשם מרחק הנסיעה בק"מ (המשתנה המסביר, X) וצריכת הדלק בליטרים ל-100 ק"מ (המשתנה המוסבר, Y). לאחר מכן, הוכפלו ערכי המשתנה המוסבר ב-1.2 (כלומר נתוני הנסיעות הבין עירוניות נורמלו).

לנתונים הותאם מודל רגרסיה ובו שני משתנים. המטריצה X בנויה כך. העמודה הראשונה היא המשתנה המסביר והעמודה השנייה היא משתנה "אינטראקציה", כלומר עבור הנסיעות העירוניות הופיע שוב המשתנה המסביר ועבור הנסיעות הבין עירוניות הופיע 0.

לצורך פשטות נניח ש-n_1 התצפיות הראשונות הן של נסיעות עירוניות.

ההצגה הפורמלית של המודל היא $Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \epsilon_i$ כאשר $\epsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ ב"ת,

והמשתנים המסבירים הם $X_{i1} = X_i$ ו- $X_{i2} = \begin{cases} X_i & 1 \le i \le n_1 \\ 0 & n_1 < i < n \end{cases}$.

נסמן $SX_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_i^2 , SX_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n} X_i^2,\ SXY_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_i Y_i , SXY_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n} X_i Y_i$

<u>סעיפים א-ג מתייחסים למהות המשתנים והמודל ללא חותך באופן כללי, ללא חלוקת התצפיות לשתי קבוצות</u>

א. (4 נקודות) הסבר במשפט קצר מדוע המודל המתאים הוא של רגרסיה פשוטה ללא חותך.

ב. (6 נקודות) הוכח שבמודל הרגרסיה הפשוטה ללא חותך, $Y_i = \beta X_i + \epsilon_i$ אומד הריבועים הפחותים ל-β הוא $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ וכן ששונותו היא $Var(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$.

ג. (6 נקודות) הוכח כי $SSE = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i^2$ כאשר כמובן $\hat{Y}_i = \hat{\beta} X_i$

ד. (4 נקודות) רשום במלים את משמעות הפרמטר β_2.

ה. (4 נקודות) הוכח כי המטריצה $X^T X$ נתונה ע"י $X^T X = \begin{pmatrix} SX_1 + SX_2 & SX_1 \\ SX_1 & SX_1 \end{pmatrix}$

ו. (6 נקודות) הוכח כי אומדי הריבועים הפחותים הם $\hat{\beta}_1 = \frac{SXY_1 + SXY_2}{SX_1 + SX_2}, \hat{\beta}_2 = \frac{SXY_1}{SX_1} - \frac{SXY_2}{SX_2}$

ז. (5 נקודות) הסבר מדוע האומד ל-β_2 מהסעיף הקודם הוא "הגיוני" תוך התייחסות לסעיפים ב' וג' לעיל.

ח. (5 נקודות) נסח את ההשערה שאכן צריכת הדלק בנסיעות עירוניות גבוהה ב-20% מצריכת הדלק בנסיעות בין עירוניות. רשום את סטטיסטי המבחן ואת התפלגותו.

ט. (5 נקודות) בדוק את ההשערה שרשמת עבור הנתונים הבאים: $SSE = 92.27$, $n_1 = 45$, $n = 101$ וכן $SX_1 = 93.88$, $SX_2 = 140538$, $SXY_1 = 1042.6$, $SXY_2 = 1405270$

מודלים של רגרסיה לינארית - דף נוסחאות למבחן מסכם

הרגרסיה הפשוטה

המודל: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ כאשר $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ ב"ת.

X_i קבועים ידועים, $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ פרמטרים לא ידועים. Y_i נצפים.

סכומי ריבועים של המשתנים: $SXX = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, SXY = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$

אומדי הריבועים הפחותים: $\hat{\beta}_1 = \frac{SXY}{SXX}, \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$

שונויות האומדים: $Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SXX}, Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 Var(\hat{\beta}_1)$.

התחזיות: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = \bar{Y} + \hat{\beta}_1(X_i - \bar{X})$

סכומי הריבועים במודל: $SST = SSY, SSR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2, SSE = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$

משוואות הנורמליות:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i X_i = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) X_i = 0$$

אח"ה ל- σ^2: $MSE = \frac{SSE}{n-2}$

סטטיסטיים: $F = \frac{SSR}{MSE}$ $t_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{MSE / SXX}}, t_{\hat{\beta}_0} = \frac{\hat{\beta}_0}{\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{SXX}\right)}}$

רווח סמך <u>לתוחלת</u> תצפית חדשה עבורה ערך המשתנה המסביר הוא x_0:

$$\bar{Y} + \hat{\beta}_1(x_0 - \bar{X}) \pm \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{SXX}\right)} t_{(n-2,1-\alpha/2)}$$

רווח <u>חיזוי</u> לתצפית חדשה עבורה ערך המשתנה המסביר הוא x_0:

$$\bar{Y} + \hat{\beta}_1(x_0 - \bar{X}) \pm \sqrt{MSE\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{SXX}\right)} t_{(n-2,1-\alpha/2)}$$

מודל הרגרסיה המרובה

$Y_i = X_i\beta + \varepsilon_i$ כאשר X_i הוא שורה באורך p.

בכתיבה מטריציונית: $Y = X\beta + \varepsilon$ כאשר $Y \in \Re^n$ וקטור התצפיות, $\beta \in \Re^p$ וקטור המקדמים, $X \in \Re^{n\cdot p}$ מטריצת המשתנים המסבירים ו- $\varepsilon \in \Re^n$ וקטור השגיאות, המקיים אותן הנחות כמו במודל הרגרסיה הפשוטה.

האר"פ $\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$. מטריצת השונויות המשותפות של האומדים: $Cov\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2\left(X^T X\right)^{-1}$

וקטור התחזיות: $\hat{Y} = X\hat{\beta}$

סכומי ריבועים: $SST = Y^T Y - n\bar{Y}^2$, $SSR = \hat{Y}^T\hat{Y} - n\bar{Y}^2$, SSE=$\left(Y - \hat{Y}\right)^T\left(Y - \hat{Y}\right)$

הסקה על תוחלת תצפית עתידית $E(Y_0)$ (במודל עם חותך)

הסקה על הרמה הממוצעת של הפרטים המקיימים $\underline{X} = \underline{x}_0$, $\underline{C}^T = \left[1, \underline{x}_0^T\right]$:

סטטיסטי המבחן:

$$t_{st} = \frac{C^T\hat{\beta} - C^T\beta|_{H_0}}{\sqrt{\hat{V}(C^T\hat{\beta})}}$$

$$V(C^T\hat{\beta}) = C^T V(\hat{\beta}) C = \sigma^2 C^T (X^T X)^{-1} C$$

ר"ס ברמת סמך $1-\alpha$ לתוחלת תצפית עתידית $E(Y_0)$: $E\left(Y_0\right) \in \underline{C}^T\hat{\underline{\beta}} \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}\left(\underline{C}^T\hat{\underline{\beta}}\right)}$

הסקה על תצפית עתידית Y_0 (במודל עם חותך).

נרצה לחזות את התגובה עבור פרט ספציפי אשר ערך המשתנה המסביר שלו הוא $\underline{x}_0$, נשתמש בשארית $e_0 = Y_0 - \hat{Y}_0$ כך ש:

$$t_{st} = \frac{e_0 - 0}{\sqrt{\hat{V}(e_0)}} = \frac{(Y_0 - \hat{Y}_0) - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1 + \underline{C}^T(X^T X)^{-1}\underline{C})}}$$

רווח חיזוי ל- Y_0 (תצפית עתידית):

$$Y_0 \in \hat{Y}_0 \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}\left(e_0\right)} = \underline{C}^T\hat{\underline{\beta}} \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{MSE\left(1 + \underline{C}^T\left(X^T X\right)^{-1}\underline{C}\right)}$$

השוואה בין מודל מלא ומודל חלקי באמצעות מבחן "F חלקי":

מודל חלקי (RM)- בעל p מקדמים (p=k+1)

מודל מלא (FM)- בעל $p+l$ מקדמים

l- מספר המשתנים אותם נבחן להוצאה מהמודל

$$F_{1\dots l|l+1\dots l+p-1} = \frac{[SSR(X_1,\dots,X_k,X_{k+1},\dots,X_{k+l}) - SSR(X_1,\dots,X_k)]/l}{SSE(X_1,\dots,X_k,X_{k+1},\dots,X_{k+l})/(n-p-l)}$$
$$= \frac{[SSR(FM) - SSR(RM)]/l}{MSE(FM)} \sim F_{l,n-k-1}$$

<u>מדדים לטיב מודל:</u>

1. <u>מדד R^2</u> - $R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$
2. <u>מדד R^2_{adj}</u> - $R^2_{adj} = 1 - \frac{SSE/(n-p)}{SST/(n-1)}$
3. <u>מדד AIC</u> (מודל רגרסיה) - $AIC = -2\log(L) + 2p = n\,ln(SSE/n) + 2p$
4. <u>מדד BIC</u> (מודל רגרסיה) - $BIC = -2\log(L) + ln(n)p = n\,ln(SSE/n) + ln(n)p$

<u>LOF</u>

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \hat{Y}_j)^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j(\bar{Y}_j - \hat{Y}_j)^2$$
$$SSE = SSPE + SSLF$$

$$F_{st} = \frac{MSLF}{MSPE} = \frac{SSLF/(m-2)}{SSPE/(n-m)} \geq F^{1-\alpha}_{m-2,n-m}$$

<u>רגרסיה לוגיסטית</u>

$\pi = \pi(X)$ - הסתברות להצלחה כתלות בווקטור המשתנים המסבירים X

המודל: $\log\left(\frac{\pi(X_i)}{1-\pi(X_i)}\right) = X_i\beta$

<u>בדיקת השערות לבדיקת ההשערה שחלק מה β הן 0:</u>

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_l = 0$

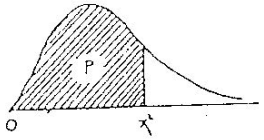
$H_1: ELSE$

<u>מבחן LRT</u>

הסטטיסטי הוא $\chi^2_{st} = Dev(RM) - Dev(FM) \sim \chi^2_l$ כאשר $Dev = -2\log(L(\hat{\beta}))$

<u>מבחן Wald</u>: סטטיסטי מבוסס על תבניות ריבועיות של האומדים שברוח משפט קוקרן מפולגות חי בריבוע

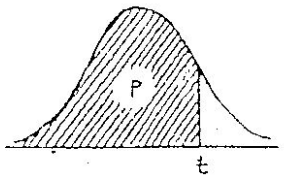
התפלגות חי-בריבוע (נגוף הטבלה רבי χ^2)



ד.ח. \ P	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	$.0^{4}393$	$.0^{3}157$	$.0^{3}982$	$.0^{3}393$	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

ח 2

לגות t של סטודנט (בגוף הטבלה - ערכי t)



ד.ח. \ P	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

F - Distribution ($\alpha = 0.05$ in the Right Tail)

Denominator Degrees of Freedom (df_2) \ Numerator Degrees of Freedom (df_1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123
4	7.7086	9.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	6.9988
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

F - Distribution ($\alpha = 0.05$ in the Right Tail)

Denominator Degrees of Freedom (df_2) \ Numerator Degrees of Freedom (df_1)	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
2	19.396	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.496
3	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5264
4	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6877	5.6581	5.6281
5	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.3650
6	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	2.6022	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.8780
20	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8894	1.8380	1.7831
23	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.7570
24	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
25	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
∞	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000